MECANIQUE DU SOLIDE

Moment d'inertie

Chapitre 5

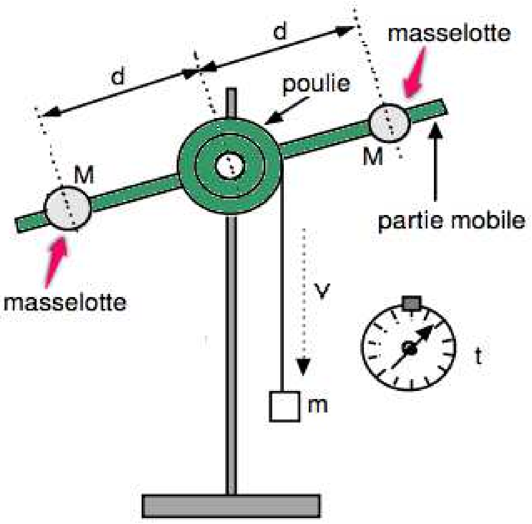
7

1 – PREAMBULE

Le théorème du moment dynamique du PFD ou encore l'énergie cinétique d'un solide en rotation font intervenir une grandeur mécanique particulière appelée « **moment d'inertie** ».

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la matière du solide étudié par rapport à un axe de rotation. Il joue en quelque sorte le même rôle que la masse pour un mouvement de translation.

2 – MISE EN EVIDENCE DE L'EFFET DU MOMENT D'INERTIE

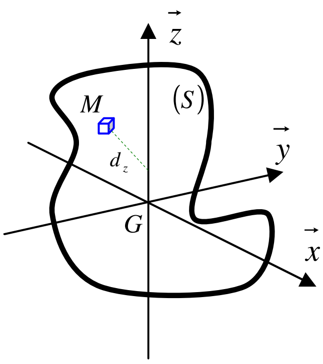


Deux masselottes de masse M sont disposées de part et d'autre de la partie mobile à la distance d de l'axe de rotation (centre de la poulie).
Le dispositif étant abandonné à lui-même, on constate que la masse suspendue m tombe, entrainant ainsi en rotation la partie mobile.

On constate enfin qu'en changeant la distance d et/ou les masses M, la mise en mouvement est plus ou moins rapide : plus d et/ou M sont grands, plus la mise en mouvement est lente.

⇨ **Les masses m et leur position d ont donc une influence sur la dynamique du système…**

3 – DEFINITION



On considère ici un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m.
Soit dm une masse élémentaire (infinitésimale) placée au point courant M et située à la distance d de l'axe $(G,\vec{z})$.

Par définition, le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$ est donné par la relation :

$$I_{GZ} = \int_V d_z^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d_z^2 = x_M^2 + y_M^2$$

Par analogie, on a aussi les moments d'inertie sur les axes $(G,\vec{x})$ et $(G,\vec{y})$:

$$I_{GX} = \int_V d^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d^2 = y_M^2 + z_M^2$$

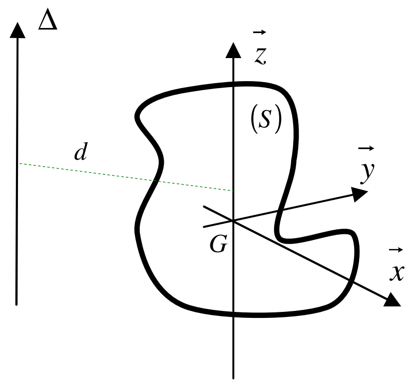
$$I_{GY} = \int_V d^2 \cdot dm \qquad \text{avec} \qquad d^2 = x_M^2 + z_M^2$$

D'un point de vue plus général, le moment d'inertie s'exprime avec une matrice d'inertie.

4 – DIMENSION ET UNITE

Le moment d'inertie est égal au produit du carré d'une distance par une masse. Sa dimension est donc $[I] = M \cdot L^2$ et, dans le système international d'unités, il s'exprime en $kg \cdot m^2$.

5 – THEOREME DE HUYGENS

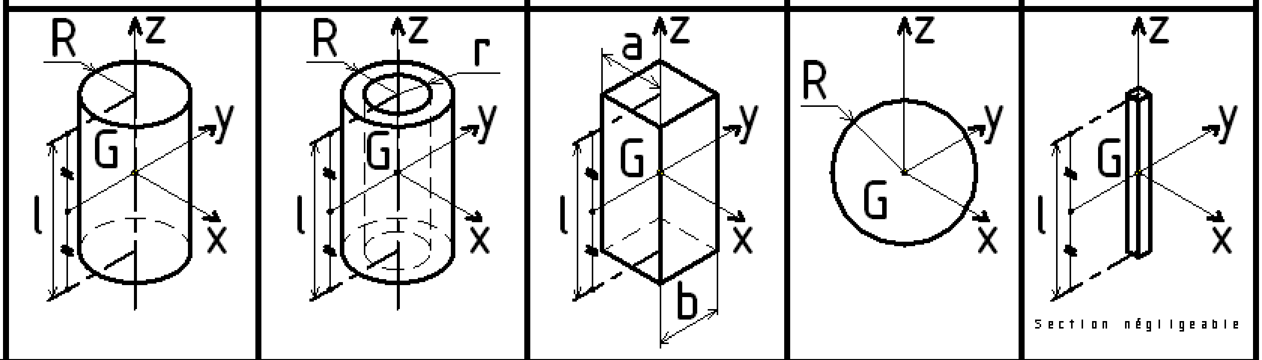


Soit I_{GZ} le moment d'inertie du solide (S) de centre d'inertie G et de masse m par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$ et I_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ ($\Delta // \vec{z}$). On a :

$$\boxed{I_\Delta = I_{GZ} + m \cdot d^2}$$

Christian Huygens
(1629 – 1695)

6 – MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES USUELS



	CYLINDRE	TUBE	PARALLELEPIPEDE RECTANGLE	SPHERE	TIGE
SOLIDES					
INERTIE	$Igx = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$	$Igx = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$	$Igx = \frac{m.(b^2+l^2)}{12}$	$Igx = \frac{2}{5}.m.R^2$	$Igx = \frac{m.l^2}{12}$
	$Igy = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.l^2}{12}$	$Igy = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$	$Igy = \frac{m.(a^2+l^2)}{12}$	$Igy = \frac{2}{5}.m.R^2$	$Igy = \frac{m.l^2}{12}$
	$Igz = \frac{m.R^2}{2}$	$Igz = \frac{m.(R^2+r^2)}{2}$	$Igz = \frac{m.(a^2+b^2)}{12}$	$Igz = \frac{2}{5}.m.R^2$	$Igz \approx 0$
Unités	I=Inertie (en $kg.m^2$) ‖ m=masse(en kg) ‖ Dimensions (en m)				

Si le solide étudié possède une géométrie complexe, on peut avoir recourt à l'informatique. Les modeleurs volumiques sont capables de donner toutes les propriétés cinétiques d'un corps volumique (masse, coordonnées du centre d'inertie, moments d'inertie sous forme matricielle).