Chapitre 12

RESISTANCE DES MATERIAUX

Moment quadratique d'une section

A1

1 – PREAMBULE

L'analyse des contraintes dans une poutre et de ses déformations fait intervenir une grandeur caractéristique de la section droite étudiée appelée « moment quadratique » et parfois appelée « moment d'inertie ». On sait déjà qu'une section possède une aire mais, constatons-le, ce n'est pas sa seule propriété.
Le moment quadratique d'une section quantifie la distribution de la matière par rapport au centre de la section. Plus la matière est éloignée du centre, plus le moment quadratique est grand, et moins la poutre se déformera (toutes choses égales par ailleurs).

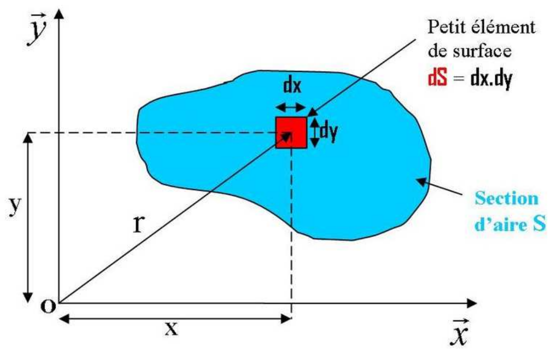
2 – DEFINITION GENERALE

Considérons dans une section d'aire totale S un petit élément de surface ds situé à distance y de l'axe $\vec{x}$ et à distance x de l'axe $\vec{y}$.

Le moment quadratique élémentaire de l'élément de surface ds par rapport à l'axe $(O\vec{x})$ est égal au produit de la surface ds par le carré de sa distance à l'axe $(O\vec{x})$: $dI_{Ox} = y^2 \cdot ds$

⇨ Le moment quadratique de toute la section est donc :

$I_{Ox} = \int_S y^2 \cdot ds$



Par analogie, on aura :

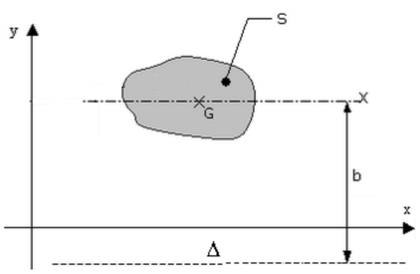
⇨ Le moment quadratique de toute la section par rapport à l'axe $(O\vec{y})$ est donc : $I_{Oy} = \int_S x^2 \cdot ds$

On utilise aussi le moment quadratique polaire (en torsion) : $I_O = \int_S r^2 \cdot ds$ avec $r^2 = x^2 + y^2$

3 – UNITES

Le moment quadratique étant le produit du carré d'une distance avec une surface, il s'exprime en m^4 dans le système MKS. D'un point de vue pratique, on utilise souvent le mm^4 et parfois le cm^4 .

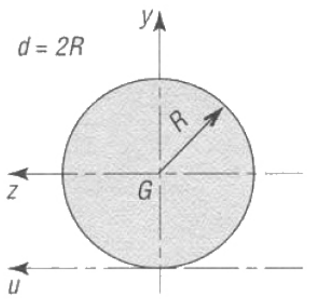
4 – THEOREME DE HUYGENS



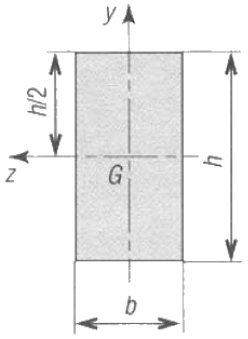
Soit une section de centre G et de surface S , I_{GX} est son moment quadratique par rapport à l'axe $(G\vec{x})$ et I_Δ celui par rapport à l'axe Δ .

On a : $\boxed{I_\Delta = I_{GX} + S \cdot b^2}$

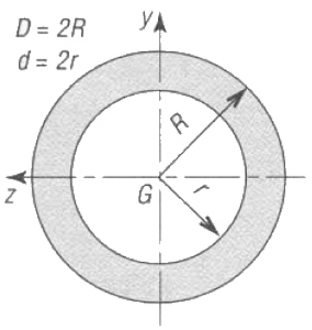
5 – SURFACE ET MOMENTS QUADRATIQUES DE SECTIONS PARTICULIERES



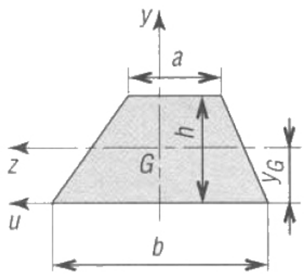
$$S = \pi R^2$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$
$$I_u = \frac{5 \pi R^4}{4} = \frac{5 \pi d^4}{64}$$
$$I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$$



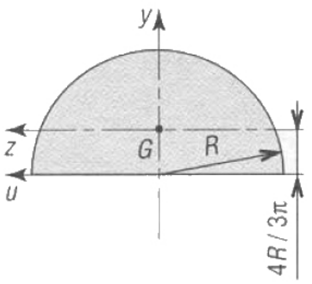
$$S = b\,h$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{12}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$
$$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$
$$I_G = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = I_y + I_z$$

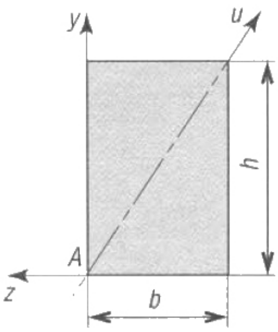


$$S = \frac{h}{2}\left(a + b\right)$$
$$y_G = \frac{h\left(2a + b\right)}{3\left(a + b\right)}$$
$$I_z = \frac{h^3\left(a^2 + 4ab + b^2\right)}{36\left(a + b\right)}$$
$$I_u = \frac{h^3\left(3a + b\right)}{12}$$

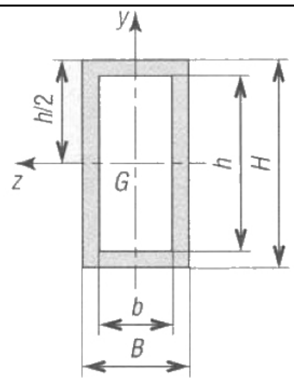


1/2 cercle

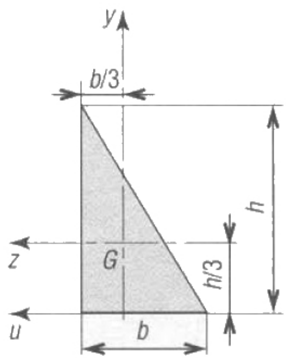
$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$
$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$
$$I_z \simeq 0{,}1098 \quad R^4$$
$$I_u = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$
$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$
$$I_u = \frac{b^3 h^3}{6\left(b^2 + h^2\right)}$$
$$I_A = \frac{b\,h}{3}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$



$$S = BH - bh$$
$$I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$
$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = I_y + I_z$$



$$S = \frac{bh}{2}$$
$$I_y = \frac{h\,b^3}{36}$$
$$I_z = \frac{b\,h^3}{36}$$
$$I_u = \frac{b\,h^3}{12}$$
$$I_G = \frac{b\,h}{36}\left(h^2 + b^2\right) = I_y + I_z$$